מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

דף נוסחאות למבחן בקורס "טורי פורייה והתמרות אינטגרליות" (21183)

1. מבחני התכנסות לטורי מספרים

1.1. יהי $\sum a_n$ טור חיובי, אם $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ או $\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, אזי:

א) אם $\rho < 1$ הטור מתכנס.

ב) אם $\rho > 1$ הטור מתבדר.

1.2. יהיו $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים. נגדיר $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ (בהנחה שהגבול קיים), אזי אם $0 < \rho < +\infty$, אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. אם $\rho = 0$ וידוע שהטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n$ מתכנס ואם $\rho = \infty$ וידוע שהטור $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum b_n$ מתכנס.

1.3. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, אזי לכל $f(x)$ פונקציה מונוטונית יורדת שמקיימת $\forall n, f(n) = a_n$ מתקיים שהאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ והטור מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

1.4. טור לייבניץ: $\sum (-1)^n a_n$ עבור $a_n > 0$, אם: א) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ב) $a_{n+1} < a_n$ $(\forall n > N)$ אזי הטור מתכנס.

2. טורי פונקציות

2.1. יהי $\sum u_n(x)$ טור פונקציות. נגדיר $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = L(x)$ (בהנחה שהגבול קיים) או $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = L(x)$ (בהנחה שהגבול קיים), אזי:

א) בנקודות $L(x) < 1$ הטור מתכנס (בהחלט).

ב) בנקודות $L(x) > 1$ הטור מתבדר.

2.2. קריטריון M של ויירשטראס: יהי $\sum u_n(x)$ טור פונקציות. אזי, אם קיים טור מספרים $\sum M_n$ מתכנס שמקיים לכל x בקטע $|u_n(x)| \le M_n$, טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע.

3. טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

רדיוס התכנסות: **(א)** $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ (אם הגבול קיים) **(ב)** $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ (תמיד קיים גבול עליון לסדרה).

תחום ההתכנסות: $|x-a| < R$ ואולי גם הנקודות בהן מתקיים שוויון.

מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

4. טורי טיילור

תהי $f(x)$ גזירה ברציפות אינסוף פעמים. טור טיילור שלה סביב $x=a$ הוא טור הפונקציות: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. ניתן לבטא את הפונקציה ע"י פולינום טיילור מסדר סופי:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$R_n(x)$ היא השארית. ניתן לבטא את השארית בצורת לגראנז':

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ כאשר $a<\xi<x$ או $x<\xi<a$.

טורי טיילור /מקלורן של פונקציות נפוצות

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\frac{a_0}{1-x}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \lvert x\rvert<1$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad -1<x\le 1$	

5. טורי פורייה

5.1. טור טריגונומטרי מחזורי בקטע $-L\le x\le L$: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$,
והמקדמים נתונים ע"י: $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

5.2. שוויון פרסבל: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)^2dx$

5.3. טור קוסינוסים בקטע $0\le x\le L$: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, והמקדמים נתונים ע"י:
$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

5.4. טור סינוסים בקטע $0\le x\le L$: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, והמקדמים נתונים ע"י:
$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

5.5. טור פורייה מרוכב בקטע $-L\le x\le L$: $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$, והמקדמים נתונים ע"י:
$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx$. קשר לטור טריגונומטרי: $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$.

מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

טבלת אינטגרלים מיידיים – שימו לב! הנוסחאות מופיעות ללא קבוע אינטגרציה

$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert$	$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
$\int xe^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)$		$\int x^2e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)$	
$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx)-b\cos(bx)\right)$		$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx)+b\sin(bx)\right)$	
$\int x\sin(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a^2}-\frac{x\cos(ax)}{a}$		$\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\sin(ax)}{a}$	
$\int x^2\sin(ax)dx = \frac{2x\cdot\sin(ax)}{a^2}+\left(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a}\right)\cos(ax)$		$\int x^2\cos(ax)dx = \frac{2x\cdot\cos(ax)}{a^2}+\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\sin(ax)$	

טבלת אינטגרלים מסוימים (n מספר שלם)

$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = L\cdot\frac{1-(-1)^n}{\pi n}$	$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = 0$
$\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = L^2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$	$\int_0^L x\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = L^2\cdot\frac{(-1)^n-1}{(\pi n)^2}$
$\int_0^L x^2\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = L^3\left(\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^3}-\frac{(-1)^n}{\pi n}\right)$	$\int_0^L x^2\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx = \frac{2L^3(-1)^n}{(\pi n)^2}$

נוסחאות טריגונומטריות

$2\cos^2 x = 1+\cos(2x)$	$2\sin^2 x = 1-\cos(2x)$
$2\sin x\sin y = \cos(x-y)-\cos(x+y)$	$2\cos x\cos y = \cos(x-y)+\cos(x+y)$
	$2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$

מכון טכנולוגי חולון - H.I.T
הפקולטה למדעים

<u>התמרת פורייה</u>

$$\Im^{-1}\left[F(\omega)\right]=f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\Im\left[f(x)\right]=F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$f(x)$	$F(\omega)$
$w_{ab}(x)=\begin{cases}1, & a\le x\le b\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$	$\frac{e^{-i\omega a}-e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega}$
$w_b(x)=\begin{cases}1, & -b\le x\le b\\ 0, & x\notin[-b,b]\end{cases}$	$\frac{\sin(\omega b)}{\pi\omega}$
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$
e^{-x^2}	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
$\delta(x)$	$\frac{1}{2\pi}$
$f(ax+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{\frac{ib\omega}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$e^{icx}f(x)$	$F(\omega-c)$
$f(x)\cos(cx)$	$\frac{F(\omega-c)+F(\omega+c)}{2}$
$f(x)\sin(cx)$	$\frac{F(\omega-c)-F(\omega+c)}{2i}$
$x^n f(x)$	$i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$

$$\Im\left[\Im\left[f(x)\right]\right]=\frac{1}{2\pi}f(-x)$$

שוויון פלנשרל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2d\omega$$